Propriétés des opérations
d'après R. CHARNAY

-Elles permettent **d'expliquer et de justifier les étapes d'un calcul, et certaines techniques opératoires ;**

-A l'école élémentaire, elles sont le plus souvent utilisées de manière **implicite**.

-**Elles n'ont pas à être nommées à ce moment de la scolarité**.

statuts de l'égalité

L’égalité est ce qu’on appelle une relation d’équivalence, c’est-à-dire qu ‘elle est :

- réflexive, tout élément est égal à lui-même.

- symétrique, a=b est équivalent à b=a.

- transitive, si a=b et b=c alors a=c.

Propriétés de l'addition
Commutativité

Cette propriété est liée au fait que, dans le calcul d'une somme de 2 nombres, on peut échanger la place des 2 nombres. Elle peut être formalisée sous la forme, a et b étant deux nombres :

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Propriétés de l'addition
Commutativité

Il est intéressant que les élèves se l'approprient, car elle permet :

- **de réduire le nombre de résultats à mémoriser** :

4 + 9 est ainsi connu dès lors que **9 + 4** est connu (et on sait que le second calcul est mémorisé plus tôt que le premier) ;

- **de simplifier certains calculs** :

8 + 56 est plus facile à calculer si on le remplace par **56 + 8**.

Propriétés de l'addition
associativité

Cette propriété est liée au fait que, dans le calcul d'une somme de 3 nombres (ou plus), on peut associer de différentes façons les 3 nombres deux par deux. Elle peut être formalisée sous la forme, a, b et c étant trois nombres :

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

Propriétés de l'addition
associativité

Elle est souvent utilisée implicitement par les élèves, en particulier :

- dans le calcul d’une somme de deux nombres, lorsqu’on décompose un des nombres, par exemple **27 + 8** peut être calculé comme: **(20 + 7) + 8** remplacé par **20 + (7 + 8)**

27 + (3 +5) remplacé par **(27 + 3) +5** (passage par la dizaine)

Propriétés de l'addition
associativité

- pour calculer une somme de plusieurs nombres, en lien avec la commutativité par exemple pour calculer :

$$\mathbf{15 + 27 + 5 + 3}$$

on échangera la place de certains nombres et on les groupera pour arriver à des calculs «faciles», comme :

$$\mathbf{(15 + 5) + (27 + 3)}$$

Propriétés de l'addition
élément neutre

0 est un élément neutre pour l’addition, ce qui se formalise par le fait que, a étant un nombre :

$$\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$$

$$\mathbf{7 = 0 + 7 = 7 + 0}$$

Propriétés de la soustraction
Commutativité ?

Contrairement à l'addition, lorsqu’elle est toujours possible (par exemple dans l’ensemble des entiers relatifs), elle n’est pas commutative :

$$17 - 10 \neq 10 - 17.$$

Propriétés de la soustraction
élément neutre

- Dans l'ensemble des entiers naturels, 0, n’est élément neutre qu’à droite ; a étant un nombre :
  - $a - 0 = 0.$

Propriétés de la soustraction
associativité?

Contrairement à l'addition, la soustraction n'est pas associative :

$$(17 - 10) - 5 \neq 17 - (10 - 5).$$

Propriétés de la soustraction
associativité?
Soustraire une somme

Pour soustraire une somme de deux nombres, on peut soustraire successivement chacun des termes de la somme, ce qui peut être formalisé par :

a, b et c étant 3 nombres (avec $a \neq b + c$ si on se situe dans l'ensemble des nombres entiers naturels):

$$\mathbf{a - (b + c) = (a - b) - c.}$$

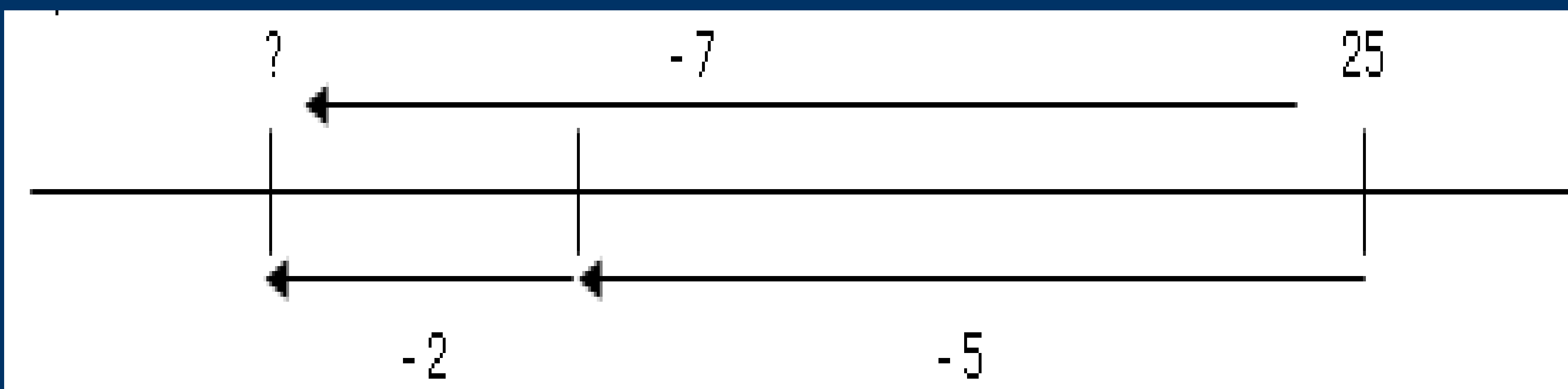
Propriétés de la soustraction
associativité?
Soustraire une somme

Cette propriété est fréquemment utilisée implicitement en calcul mental. Par exemple, pour calculer 25 – 7, un élève va d'abord retirer 5, puis 2. Son calcul peut être formulé ainsi :

$$\mathbf{25 - 7 = 25 - (5 + 2) = (25 - 5) - 2}$$

Propriétés de la soustraction
associativité?
Soustraire une somme

Une représentation du calcul à l'aide de la droite numérique peut aider à la compréhension de la propriété utilisée :



Propriétés de la soustraction
associativité?
Soustraire une différence

Pour soustraire une différence de deux nombres, on peut soustraire le premier terme de la différence, puis ajouter le deuxième terme, ce qui peut être formalisé par, a, b et c étant 3 nombres (avec a ≠ b - c et b ≠ c dans l'ensemble des nombres entiers naturels):

$$\mathbf{a - (b - c) = (a - b) + c.}$$

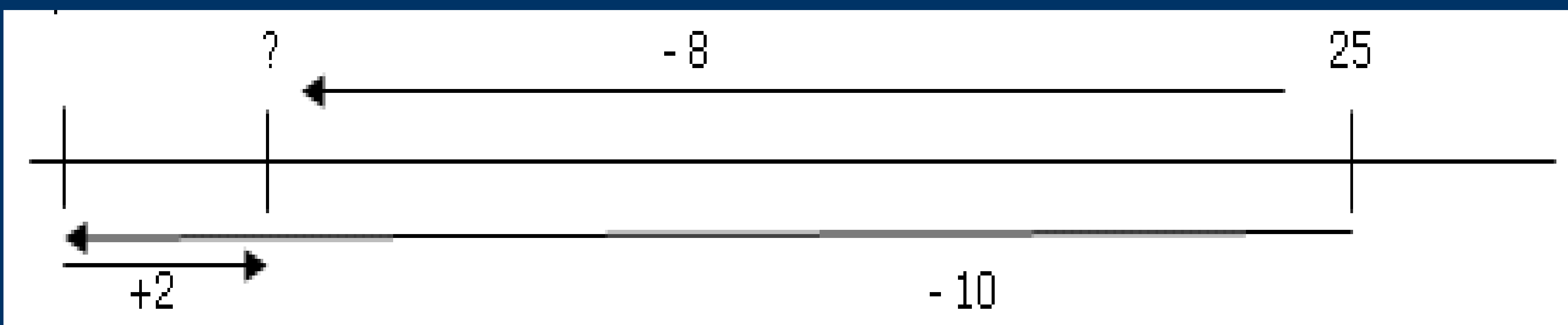
Propriétés de la soustraction
associativité?
Soustraire une différence

Cette propriété est très utile en calcul mental. Par exemple, pour calculer 25 – 8, on peut soustraire 10, puis ajouter 2. Ce calcul peut être formulé ainsi :

$$25 - 8 = 25 - (10 - 2) = (25 - 10) + 2$$

Propriétés de la soustraction
associativité?
Soustraire une différence

Une représentation du calcul à l'aide de la droite numérique peut aider à la compréhension de la propriété utilisée :



Propriété de l'ajout simultané

On ne change pas la valeur d'une différence en ajoutant le même nombre à chaque terme de la différence. Ce qui peut être formalisé par :

a et b étant 2 nombres (avec a ≠ b si on se situe, par exemple, dans l'ensemble des nombres entiers naturels), c étant un autre nombre :

$$\mathbf{a - b = (a + c) - (b + c)}$$

Propriété de l’ajout simultané

Cette propriété peut être utilisée en calcul mental, bien que les élèves y aient peu recours spontanément, par exemple le calcul de

43 – 19

peut être remplacé par celui de

44 – 20

en ajoutant 1 aux deux termes de la somme initiale.

Propriété de l'ajout simultané

C'est également la propriété qui permet de justifier l'une des techniques opératoires de la soustraction souvent utilisée :

$$\begin{array}{cccc} & 6 & {}_{1}3 & {}_{1}5 \\ - & {}_{1} & 8_{1} & 7 \\ \hline & 5 & 4 & 8 \end{array}$$

Propriétés de la multiplication
Commutativité

Cette propriété est liée au fait que, dans le calcul d’un produit de 2 nombres, on peut échanger la place des 2 nombres. Elle peut être formalisée sous la forme, a et b étant deux nombres :

$$a \times b = b \times a$$

Propriétés de la multiplication
Commutativité

Comme pour l'addition, elle permet:

- de réduire le nombre de résultats à mémoriser :

7 x 4 est ainsi connu dès lors que 4 x 7 est connu (ce qui réduit pratiquement de moitié le nombre de résultats à mémoriser).

- **de simplifier certains calculs** :

12x4 et 4x12

Propriétés de la multiplication
élément neutre

1 est un élément neutre pour la multiplication, ce qui se formalise par le fait que, a étant un nombre :

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Propriétés de la multiplication
élément absorbant

0 est un élément neutre pour la multiplication, ce qui se formalise par le fait que, a étant un nombre :

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

Propriétés de la multiplication
Associativité

Cette propriété est liée au fait que, dans le calcul d'un produit de 3 nombres (ou plus), on peut associer de différentes façons les 3 nombres deux par deux. Elle peut être formalisée sous la forme, a, b et c étant trois nombres :

$$\underline{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

Propriétés de la multiplication
Associativité

Elle est souvent utile en calcul mental, en particulier :
- dans le calcul d'un produit de deux nombres, lorsqu'on décompose un des nombres, par exemple **35 x 4** peut être calculé :

- comme **35 x (2 x 2)** remplacé par **(35 x 2) x 2**
- ou comme **(7 x 5) x 4** remplacé par **7 x (5 x 4)**

Propriétés de la multiplication
Associativité

- pour calculer un produit de plusieurs nombres, en lien avec la commutativité par exemple pour calculer

<u>**4 x 6 x 5 x 5**</u>

on échangera la place de certains nombres et on les groupera pour arriver à des calculs «faciles», comme

<u>**(4 x 5) x (6 x 5)**</u>

Propriétés de la multiplication
Associativité

C'est également la propriété qui intervient dans le calcul d'un produit dont un facteur est un nombre entier de dizaines ou de centaines, par exemple :

$$\mathbf{14 \times 20 = 14 \times (2 \times 10) = (14 \times 2) \times 10}$$

Propriétés de la multiplication

Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction

Cette propriété est liée au fait que calculer le produit d’une somme ou d'une différence par un nombre peut se ramener à calculer le produit de chacun des termes par ce nombre, puis de calculer la somme ou la différence des résultats obtenus. Elle peut être formalisée sous la forme

a x (b + c) = (a x b) + (b x c)

a x (b - c) = (a x b) - (b x c)

Propriétés de la multiplication
Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction

Elle est très utilisée en calcul mental. Ainsi le calcul déjà évoqué du produit **35 x 4** peut être remplacé par le calcul suivant :

$$\mathbf{(30 + 5) \times 4 = (30 \times 4) + (5 \times 4)}$$

Ou **18 x 6** calculé comme :

$$\mathbf{(20-2) \times 6 = (20 \times 6) - (2 \times 6)}$$

Propriétés de la multiplication
Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction

Elle permet également de comprendre la technique usuelle du calcul posé d'une multiplication où, par exemple, le calcul de 387 x 205 est remplacé par les calculs de 387 x 5, puis de 387 x 200, avec à la fin ajout des résultats partiels :

```
    387
   X205
  -----
   1935  ◄── 387 x 5
+ 77400  ◄── 387 x 200
  -----
  79335
```

Conclusion

Lorsque les opérations (additions et soustractions au CP, par exemple) et les écritures symboliques (comme 5 + 3 = 8) sont présentées à priori, c’est-à-dire en dehors de toute résolution de problèmes qui viendrait ensuite, les élèves peuvent difficilement leur donner du sens.

- L'introduction des signes ne peut se faire que lorsque les élèves possèdent déjà les mots pour dire leur pensée.
- Certaines propriétés ne peuvent pas être représentées par des écritures mathématiques à l'école élémentaire, il faudra passer par des manipulations, schéma...
- Plus on aura manipulé et travaillé sur les nombres en utilisant les propriétés des opérations, plus les techniques opératoires pourront prendre du sens pour les élèves.