



académie  
Lyon

Région académique  
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES



Pôle de formation Centre

# **Expérimentation départementale « faits numériques » LOIRE 2019-2020**

**Mercredi 11 décembre 2019**

**Ecole d'Estiallet**

**Montbrison**

Danielle Schvetzoff, CPC Firminy  
Pierre Martin-Calle, DEA Estiallet

## **Atelier A**

**Partager des références,  
faire connaître le prescrit**

**-Le plan VT**

**-Le triptyque**

**« manipuler**

**/verbaliser/abstraire »**

**3 modes de représentation**

**De quoi parle-t-on quand  
on parle de faits  
numériques : FN et calcul  
mental**

## **Atelier B**

**Oser des outils**

**- Connaître et s'approprier  
l'outil FN 42**

**- Connaître et s'approprier les  
fiches « fait numérique »**

**-Organiser l'expérimentation**



**21** **MESURES**  
**POUR**  
**L'ENSEIGNEMENT**  
**DES**  
**MATHÉMATIQUES**

Rapport remis  
le 12 février 2018

par Cédric Villani,  
député de l'Essonne  
et Charles Torossian,  
inspecteur général  
de l'éducation nationale

## **PRIORITÉ AU PREMIER DEGRÉ**

- 1 Formation initiale**
- 2 CP-CE1 en Rep+**
- 3 Expérimentation à grande échelle**
- 4 Équipement**

## **MATHÉMATIQUES : EFFICACITÉ, PLAISIR ET AMBITION POUR TOUS**

- 5 Les étapes d'apprentissage**
- 6 Le cours**
- 7 Périscolaire et clubs**
- 8 Apports des autres disciplines**
- 9 Réconciliation**
- 10 Projets**

## **NOMBRES ET CALCULS**

- 11 Sens des nombres et des opérations**
- 12 Automatismes**
- 13 Paliers**

## **FORMATION CONTINUE ET DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL**

- 14 Référent mathématiques**
- 15 Développement professionnel en équipe**
- 16 Laboratoire de mathématiques**

## **PILOTAGE ET ÉVALUATION**

- 17 Priorité nationale**
- 18 Expert de haut niveau en mathématiques**
- 19 Égalité femmes-hommes**
- 20 Manuels**
- 21 Montée en puissance d'un portail de ressources**

### **3 Expérimentation à grande échelle**

Lancer, dès septembre 2018, sur le cycle 2, des expérimentations pour procéder à une évaluation scientifique de méthodes explicites et de l'efficacité de leur mise en oeuvre.

### **5 Les étapes d'apprentissage**

Dès le plus jeune âge mettre en oeuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur:

- la manipulation ;
- la verbalisation ;
- l'abstraction.

### **12 Automatismes**

Développer les automatismes de calcul à tous les âges par des pratiques rituelles (répétition, calculs mental et intelligent, etc.) pour favoriser la mémorisation et libérer l'esprit des élèves en vue de la résolution de problèmes motivants.

## 5 Les étapes d'apprentissage

Dès le plus jeune âge mettre en oeuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur:

- la manipulation ;
- la verbalisation ;
- l'abstraction.



Manipuler, verbaliser, abstraire dans  
l'enseignement des mathématiques  
Éclairages didactiques et cognitifs

## Quelques définitions de manipulation



Marie-Caroline Croset  
[marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr)  
Marie-Line Gardes  
[marie-line.gardes@univ-lyon1.fr](mailto:marie-line.gardes@univ-lyon1.fr)



LAROUSSE

- **Action** de manipuler; **résultat** de cette action
  - Exercice scolaire au cours duquel les élèves manipulent
  - **Action** de toucher, tenir, transporter **avec les mains**
  - **Action** de mettre en œuvre, de manœuvrer, d'utiliser
- 
- Action de manipuler quelque chose, un objet, un appareil.
  - Action de soumettre quelque chose à des opérations diverses, en particulier dans un but de recherche ou d'apprentissage.
  - Exercice au cours duquel des élèves, des étudiants ou des chercheurs réalisent une expérience ; l'expérience elle-même.

## SITUATION 1 : JEU DU GLOUTON



A deux, avec 20 jetons.

A son tour, chaque joueur peut prendre un ou deux jetons.

Le joueur qui prend le ou les derniers jetons a gagné.

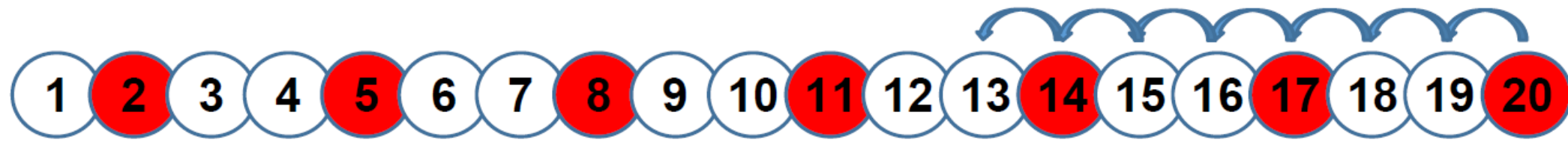
*Jouez en binôme*


Qui a pensé à chercher une stratégie gagnante ?

Au bout de combien de jeux ?

Jeu à stratégie gagnante

Raisonnement par  
chainage arrière



 Positions gagnantes car elles empêchent l'adversaire de les atteindre

Pour gagner face à un adversaire qui connaît également le jeu, il est donc nécessaire de commencer et de prendre les jetons 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 - 20

**Quels sont les objets mathématiques en jeu ?**

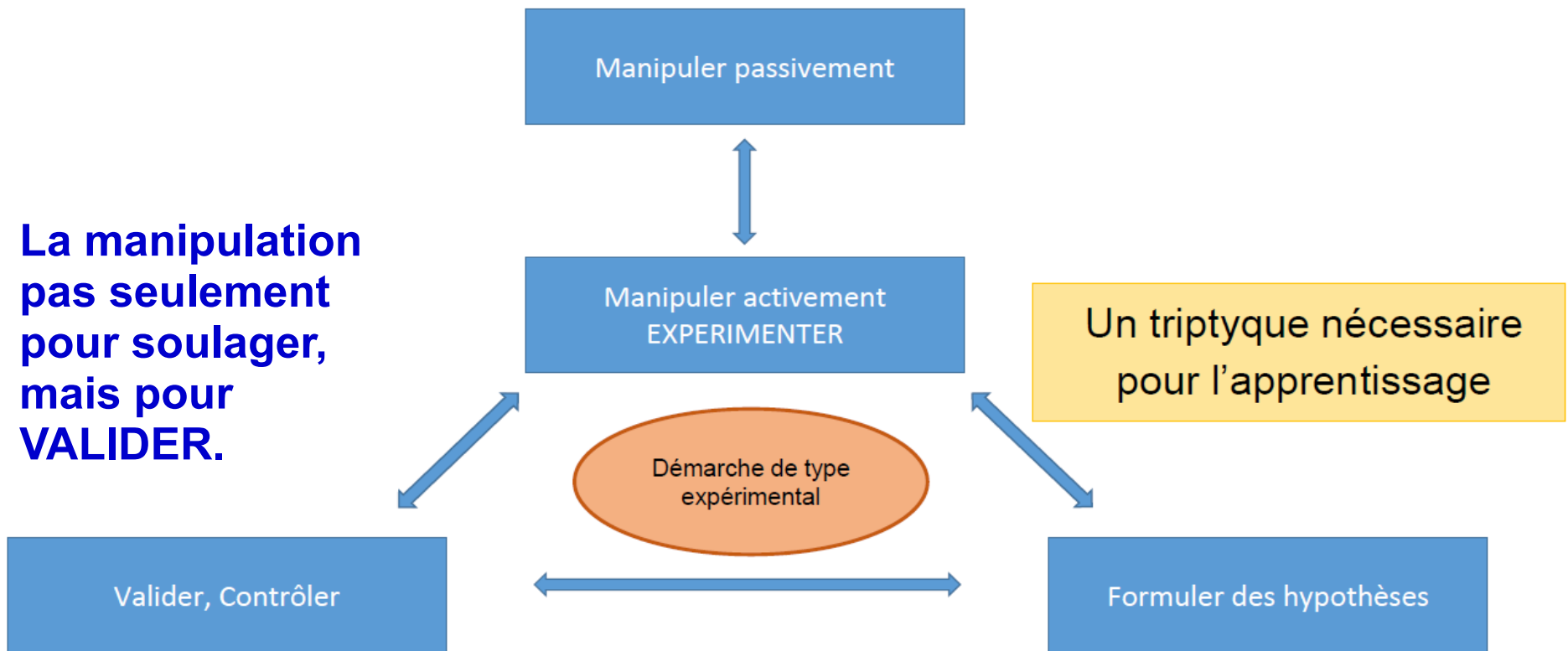


On peut manipuler sans anticipation, sans être actif cognitivement

Cette manipulation peut être une étape intermédiaire avant l'anticipation de la recherche d'une stratégie gagnante

→ Distinguer manipulation passive de la manipulation active

**Manipulation active si recherche d'une stratégie en lien avec l'objectif lié à l'activité**



(Dias, 2008), (Gardes, 2018)

## Les mathématiques, une science expérimentale ?

*C'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale (Bkouche, 1982)*

*« une méthode d'investigation systématique que je n'hésite pas à désigner sous le nom de méthode expérimentale » (Perrin, 2007)*

*Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuves, etc. (Perrin, 2007)*

## SITUATION 2 : SOMME D'ENTIERS CONSECUTIFS

Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

**215**

Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

**275**

Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

**515**

**Expliquer votre procédure au groupe.**

**Choisir celle qui vous paraît la plus rapide.**

La course entre les groupes...



Série 4 : 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658

**6535**

**La course entre les groupes...**

**Mais attention sur huit nombres consécutifs**

Série 5 : 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

**356**

Répartissez-vous :

Un groupe multicolore



Expliquer vos procédures.

**Objectif** : A la prochaine série, votre groupe de couleur doit être premier !

**Série 6 : 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32**

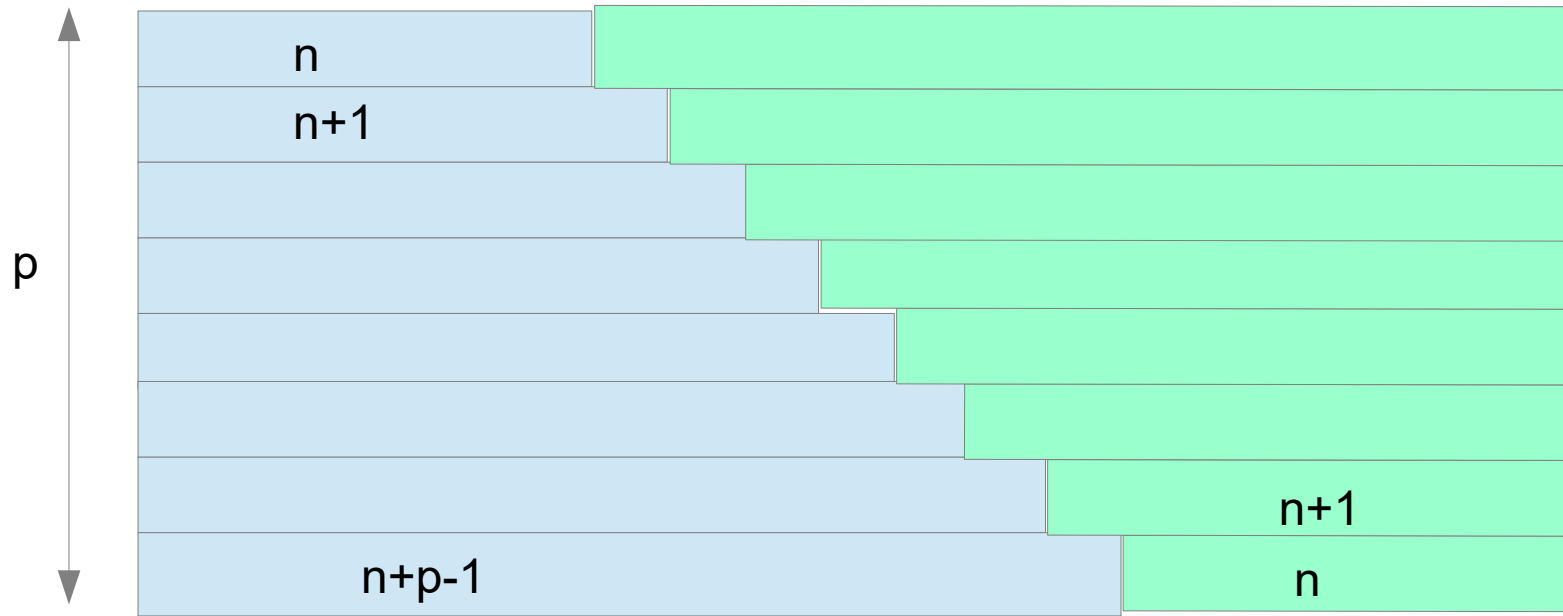
**228**

**Qu'avez-vous fait pour trouver une stratégie ? Avez-vous manipulé ? Expérimenté ? Validé ?**

**Qui peut proposer une procédure reproductible ?**

$$S = \frac{n+n+p-1}{2} \times p$$

**S** étant la somme des entiers,  
**n** le premier entier de la série,  
**p** le nombre d'entiers de la série.

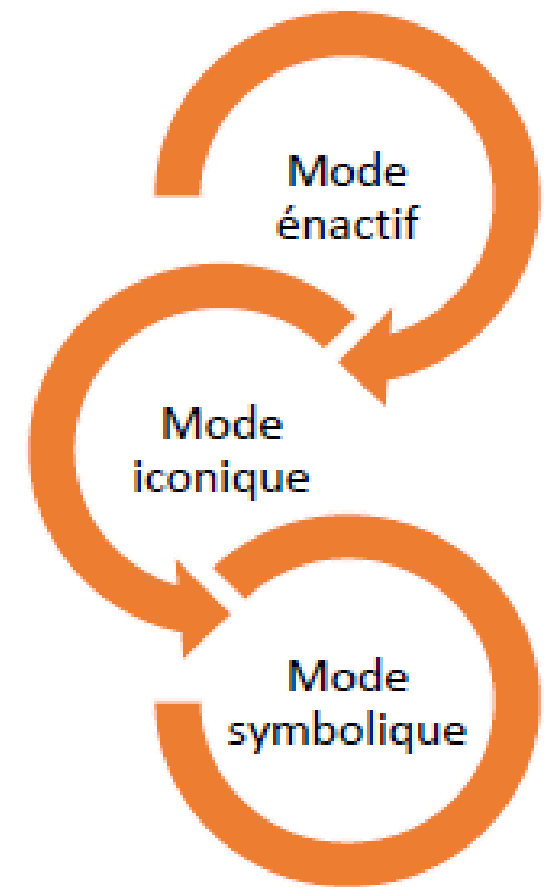


## Trois registres de représentation

Mode **énactif** : on agit

Mode **iconique** : on représente

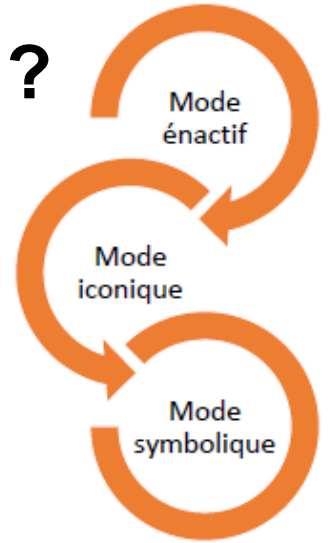
Mode **symbolique** : on abstrait



(Bruner, 1973), (Barth, 1987)

# Nécessité et insuffisance de chaque mode ?

Le mode symbolique est insuffisant (dans un premier temps) pour comprendre la procédure.



Le mode énonciatif ne permet pas d'élaborer une procédure adaptable aux variables, il peut même être pénalisant.

Le mode iconique est ici une étape de modélisation qui permet d'arriver à l'abstraction.

Chaque mode est insuffisant par lui-même, les allers-retours entre les trois sont nécessaires !

Ne pas enfermer les élèves dans le mode énonciatif, qui peut même devenir une surcharge cognitive...



## Une autre définition de la manipulation

On appellera **manipuler** la phase d'action sur des objets tangibles ou symboliques

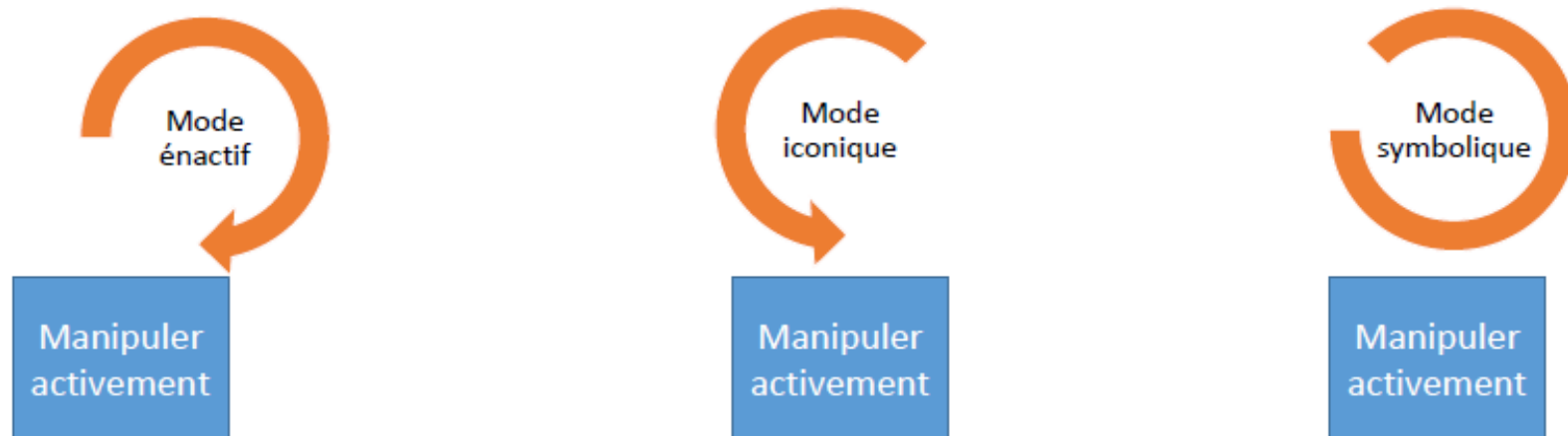
Des verbes d'**action** : Mettre en œuvre, déplacer, manier, toucher, palper, actionner, utiliser, opérer, calculer, etc.

On peut manipuler en mode symbolique.

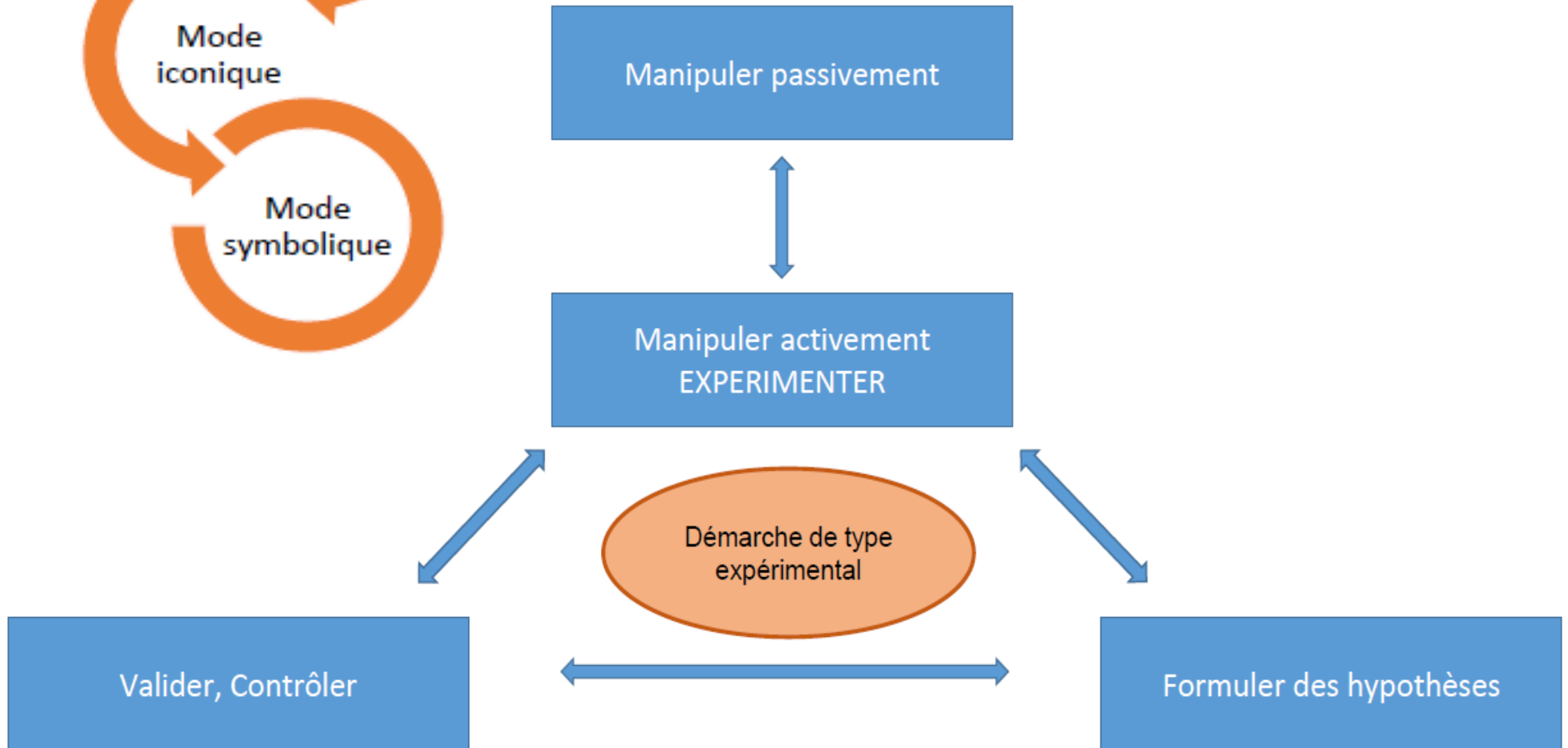
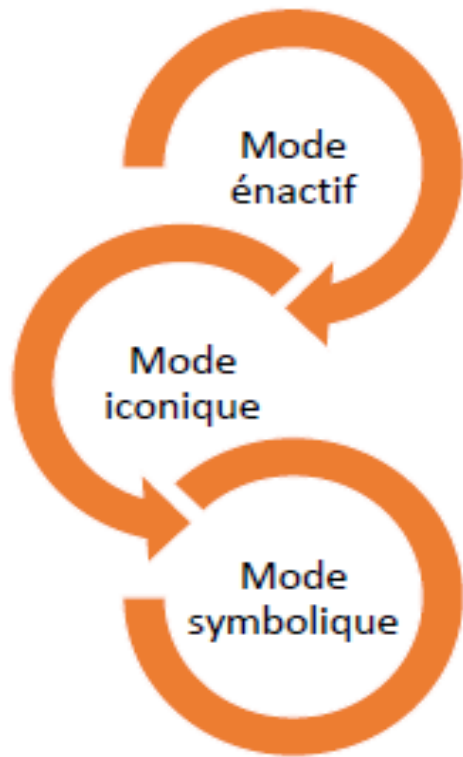
Le triptyque existe dans le mode symbolique.

Il est nécessaire de faire vivre ce triptyque dans un des modes.

Il est nécessaire de manipuler mais pas nécessairement dans le mode éactif.



# Un triptyque nécessaire pour l'apprentissage



(Dias, 2008), (Gardes, 2018)

## RETOUR SUR LA SITUATION 1 : JEU DU GLOUTON

Comment modifier la situation pour illustrer le triptyque en d'autres modes ?

**VARIANTE 1:** la course à 20,  
avec une ligne graduée  
comme support ?

**VARIANTE 2:** Avec 21 jetons ?  
Qu'est-ce qui change alors ?



**VARIANTE 3:** On peut prendre  
1, 2 ou 3 jetons?  
Qu'est-ce qui change alors ?



**VARIANTE 4:** Avec 5929  
jetons ?  
Qu'est-ce qui change alors ?

**$5929 = 1976 \times 3 + 1$**   
**Celui qui dit 1 est sûr de  
gagner, donc il faut  
commencer...**

# Zoom sur le mode énonctif, quelques alertes sur les manipulatifs (matériel concret utilisé pour l'apprentissage de concepts mathématiques)



4 principes généraux d'application des manipulatifs, identifiés par les sciences cognitives, sont susceptibles de mener à un meilleur apprentissage des mathématiques.

- Utiliser le manipulatif de façon constante et sur une longue période
- Commencer par des représentations transparentes et avancer petit à petit vers des représentations plus abstraites
- Eviter les manipulatifs qui ressemblent à des objets de la vie de tous les jours ou ont des caractéristiques non pertinentes qui déconcentrent
- Expliquer la relation entre le manipulatif et le concept mathématique de façon explicite

### 3 Expérimentation à grande échelle

Lancer, dès septembre 2018, sur le cycle 2, des expérimentations pour procéder à une évaluation scientifique de méthodes explicites et de l'efficacité de leur mise en oeuvre.

### 12 Automatismes

Développer les automatismes de calcul à tous les âges par des pratiques rituelles (répétition, calculs mental et intelligent, etc.) pour favoriser la mémorisation et libérer l'esprit des élèves en vue de la résolution de problèmes motivants.

## Expérimentation faits numériques dans la Loire

Postulat : travailler avec régularité et de manière explicite les relations entre les nombres permet de gagner en efficacité en calcul.

Pour chaque fiche :

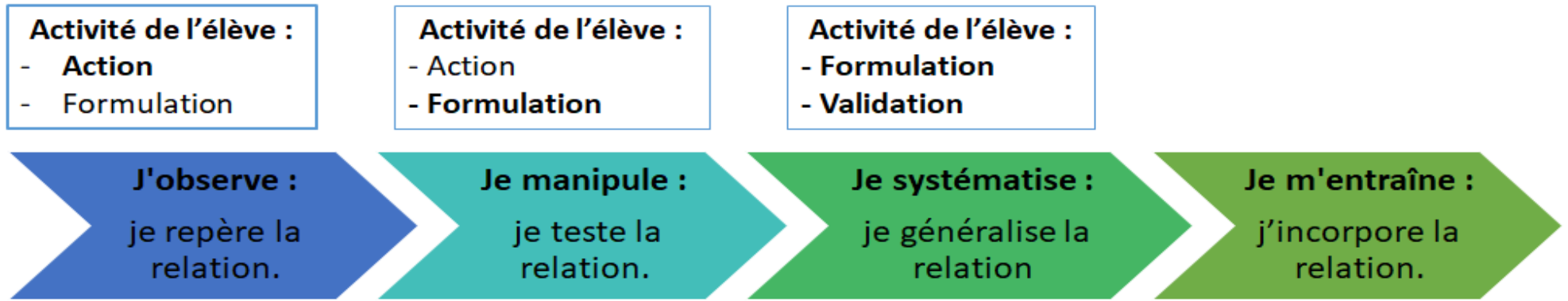
**Rappel du prescrit**

Choix des nombres par rapport à leurs relations

Rappel des propriétés et des règles de calculs engagées



# L'apprentissage du fait numérique



Séance qui permet aux élèves de :

- repérer les relations entre les nombres, calculer
- chercher éventuellement de nouveaux exemples où on pourrait calculer de la même façon
- se mettre en démarche de comprendre le savoir à acquérir : FORMULER DES HYPOTHESES

Séance qui permet aux élèves :

- d'écrire la ou les règles d'une ou plusieurs manières à partir des productions et des échanges
- d'identifier d'autres règles que celles qu'ils connaissaient ou utilisaient

## Intérêt « à l'instant T »

L'objectif est d'entrer dans des procédures automatisées en s'appuyant sur des relations construites entre les nombres

Séance qui permet aux élèves de :

- continuer les essais à partir des exemples fournis par l'enseignant ou par les élèves (recueillis par exemple lors de la phase « j'observe »)
- chercher de nouveaux exemples où on pourrait calculer de la même façon

**CONTROLLER, VALIDER DES HYPOTHESES**

## Cycle 2

### L'appropriation de **stratégies** de calcul

adaptées aux nombres et aux opérations en jeu. Ces stratégies s'appuient sur la connaissance de **faits numériques mémorisés** (répertoires additif et multiplicatif, connaissance des unités de numération et de leurs relations, etc.) et sur celle des **propriétés** des opérations et de la numération.

## Cycle 3

Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la **procédure** la plus efficace en fonction de leurs connaissances et des nombres en jeu. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur suffisamment de **faits numériques mémorisés** et sur des **procédures automatisées** de calcul élémentaires .



## FAITS NUMERIQUES

**Connaissances déclaratives** : faits arithmétiques; instances ou chunks associant des opérands et des résultats *mémorisés*; récupération directe en mémoire.  
(Fayol)

## PARADOXE

La connaissance et la maîtrise d'un nombre insuffisant de procédures automatisées peuvent donc conduire l'élève à adopter en calcul un comportement automatisé. Pour dépasser ce comportement, il est nécessaire d'enrichir le panel des procédures automatisées.

Nous pouvons résumer ainsi le paradoxe de l'automatisme : trop peu d'automatismes (au sens de trop peu de procédures automatisées) peut renforcer l'automatisme (au sens du comportement automatisé) ; davantage d'automatismes peut permettre d'échapper à l'automatisme.

Une première tentative pour dépasser ce paradoxe consiste donc en la mise en place progressive de procédures élémentaires automatisées de calcul. Il s'agit d'accroître les performances des élèves en enrichissant leurs connaissances numériques, en installant de nouveaux faits numériques avec une pratique régulière du calcul mental. Cela devrait les amener à restituer des faits mémorisés sans avoir à les reconstruire à chaque fois. Ces procédures élémentaires de calcul jouent ensuite le rôle de modules de calcul intégrés dans des procédures plus riches et adaptées à d'autres nombres.

## PROCEDURES

Précisons ce que nous entendons par « automatisme » et « procédure automatisée ».

Une procédure est *automatisée* quand elle est restituée par l'élève pour résoudre un calcul sans que celui-ci la reconstruise (Fischer 1987, Boule 1997).

Par *automatisme*, nous entendons, selon le contexte, soit le recours à un ensemble de procédures automatisées installées en mémoire et ayant fait l'objet d'un enseignement ou d'une pratique préalable, soit un comportement se caractérisant par une mobilisation quasi systématique de l'élève d'un seul type de procédure quelles que soient les données numériques du calcul à effectuer.

Une procédure est *disponible* quand elle est mobilisée lors d'un calcul sans appel explicite de la part de l'enseignant, notamment dans le cas où elle constitue un des éléments de la stratégie de calcul mise en œuvre par l'élève pour réaliser la tâche demandée.



## STRATEGIES/PROCEDURES

Des connaissances sur

Un ensemble de faits numériques  
**disponibles** en mémoire

Un ensemble de procédures  
**automatisées**

Les propriétés des **opérations** et de  
la **numération**

des **stratégies** de calcul possibles

Stratégie :

choix d'une réponse adaptée à un  
contexte (numérique), par  
économie cognitive.

*Les procédures, les faits  
numériques et les modes de  
représentation sont choisis en  
fonction des valeurs en jeu parce  
qu'ils contribuent à construire la  
réponse la moins difficile à  
mettre en œuvre dans la situation  
en jeu.*

Par **stratégie**, on entend la **capacité** à **choisir** la procédure; **Il n'y a pas de procédures expertes** en calcul mental et en ligne, mais des expertises personnelles construites et adaptables

A partir de la stratégie adoptée, l'élève peut élaborer une ou des **procédures personnelles**, c'est-à-dire **des suites d'actions ou d'opérations** pour atteindre le but qui est d'effectuer le calcul.

# **32x25**

$$30 \times 25 + 2 \times 25 = 750 + 50$$

$$30 \times 20 + 30 \times 5 + 2 \times 20 + 2 \times 5$$

décomposition additive d'un des  
deux facteurs et utilisation de la  
distributivité simple

décomposition additive des deux  
facteurs et utilisation de la  
distributivité double

$$8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100$$

décomposition multiplicative d'un  
(ou des deux) facteur(s) et  
utilisation de l'associativité.

$$8 \times 4 \times 5 \times 5 = 40 \times 20$$

$$32 \times 20 + 32 \times 5 = 640 + 160$$

$$1000 = 888 + 88 + 8 \times 3$$

$$1000 = 8 \times 125 = 8 \times (111 + 11 + 3) \quad (2\text{---}5)$$

$$10\ 000 = 8\ 888 + 888 + 8 \times 28$$

$$10\ 000 = 8 \times 1250 = 8 \times (1111 + 111 + 28) \quad (22\text{---}50)$$

$$100\ 000 = 88\ 888 + 8\ 888 + 8 \times 278$$

$$100\ 000 = 8 \times 12\ 500 = 8 \times (11\ 111 + 1\ 111 + 278) \quad (222\text{---}500)$$

$$1\ 000\ 000 = 888\ 888 + 88\ 888 + 8 \times 2778$$

$$1\ 000\ 000 = 8 \times 125\ 000 = 8 \times (111\ 111 + 11\ 111 + 2\ 778) \quad (2\ 222\text{---}5\ 000)$$

$$10\ 000\ 000 = 8\ 888\ 888 + 888\ 888 + 8 \times 277\ 778$$

$$10\ 000\ 000 = 8 \times 1\ 250\ 000 = 8 \times (1\ 111\ 111 + 111\ 111 + 27\ 778) \quad (22\ 222\text{---}50\ 000)$$

$$100\ 000\ 000 = 88\ 888\ 888 + 8\ 888\ 888 + 8 \times 277\ 778$$

**MERCI**

**de votre attention, à**

**vous de jouer !**